UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO B

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.- (15 ptos.) Calcule las siguientes integrales :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right).\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) dx$;

b) $\displaystyle\int x\sqrt{e^x}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{3x^2+18x+30}\, dx$.

2.- (8 ptos.)

a) Halle la derivada de la función f(x) definida implícitamente por :
$(\cos(y))^x = x^2(y+1)$;

b) halle la pendiente de la recta tangente en A(1, 0) a la curva de ecuación $(\cos(y))^x - x^2(y+1) = 0$.

3.- (7 ptos.) Demuestre que si a, b son dos números reales positivos entonces :
$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$.

SOLUCIONES:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right).\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) dx$;

observemos que $\text{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right).\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = \left(\frac{1-\cos(x/2)}{2}\,\frac{1+\cos(x/2)}{2}\right) = \frac{1}{4}(1-\cos^2(x/2)) =$
$= \frac{1}{4}\,\text{sen}^2(x/2) = \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos(x)}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos(x))$, luego :

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\left(\frac{x}{4}\right).\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) dx = \frac{1}{8}\left[x - \text{sen}(x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] .$$

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO B

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

b) $\int x\sqrt{e^x}\,dx = \int x.e^{x/2}dx = 2x\,e^{x/2} - \int 2\,e^{x/2}dx = 2x\,e^{x/2} - 4\,e^{x/2} + C$.

c) $\int \frac{2x+5}{3x^2+18x+30}\,dx$;

$3x^2+18x+30 = 3\,[\,x^2+6x+10] = 3[\,(x+3)^2+1\,]$; $u = x+3$, $du = dx$,

$\frac{2x+5}{3x^2+18x+30}\,dx = \frac{2(u-3)+5}{3(u^2+1)}\,du = \frac{1}{3}\,\frac{2u-1}{u^2+1}\,du$;

$\int \frac{2x+5}{3x^2+18x+30}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2u-1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\ln(u) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(u) =$

$= \frac{\ln(x^2+6x+10) - \operatorname{arctg}(x+3)}{3} + C.$

2.- $(\cos(y))^x = x^2(y+1)$;

Método #1.
$\ln[(\cos(y))^x] = x.\ln[\cos(y)] = \ln[x^2(y+1)] = 2\ln(x)+\ln(y+1)$;

derivando implícitamente :
$1.\ln[\cos(y)]+x.(-\tan(y)).y' = \frac{2}{x} + \frac{y'}{y+1} \Rightarrow \ln[\cos(y)] - \frac{2}{x} = [\,\frac{1}{y+1} + x.\tan(y)\,]y' \Rightarrow$
$\Rightarrow\ y' = \frac{y+1}{x}\,\frac{x.\ln(\cos(y)) - 2}{1+x.(y+1).\tan(y)}$; $y'(A) = -2$ = pendiente de la recta tangente.

Método #2.

derivando implícitamente : $(\cos(y))^x\,[\ln(\cos(y))+x(-\tan(y)).y'] = 2x(y+1)+x^2y'$;

$y'\,[\,x^2 + x.\tan(y)(\cos(y))^x] = (\cos(y))^x\ln(\cos(y)) - 2x(y+1)$;

$y' = \frac{(\cos(y))^x\ln(\cos(y)) - 2x(y+1)}{x^2 + x.\tan(y)(\cos(y))^x}$; $y'(A) = -2$ = pendiente de la recta tangente.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO B

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Observación :
los dos resultados obtenidos con los dos métodos parecen diferentes, sin embargo tomando en cuenta que f(x) está definida implícitamente por $(\cos(y)^x = x^2(y+1)$, tenemos :

$$\frac{(\cos(y))^x \ln(\cos(y)) - 2x(y+1)}{x^2 + x.\tan(y)(\cos(y))^x} = \frac{x^2(y+1)\ln(\cos(y)) - 2x(y+1)}{x^2 + x.\tan(y)x^2(y+1)} =$$

$$= \frac{x(y+1)}{x^2}\,\frac{x.\ln(\cos(y)) - 2}{1+ x(y+1).\tan(y)} = \frac{y+1}{x}\,\frac{x.\ln(\cos(y)) - 2}{1+ x.(y+1).\tan(y)} .$$

3.- Demuestre que si a, b son dos números reales positivos entonces :
$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Método #1 : $\ln(ab) - \ln(a) - \ln(b)$ debería ser = 0

$$= \int_1^{ab} \frac{dt}{t} - \int_1^{a} \frac{dt}{t} - \int_1^{b} \frac{dt}{t} = \int_a^{ab} \frac{dt}{t} - \int_1^{b} \frac{dt}{t}$$. Entonces es suficiente verificar que

$$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} - \int_1^{b} \frac{dt}{t} = 0 \text{ es decir } \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{b} \frac{dt}{t}$$; esto se comprueba calculando la primera integral por medio de la sustitución $u = at$.

En efecto : $$\int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{b} \frac{du/a}{u/a} = \int_1^{b} \frac{du}{u} = \int_1^{b} \frac{dt}{t} .$$

Método #2
verifiquemos que la función f(x) definida en $(0, +\infty)$ por $f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$

es la función nula ; usando primero una consecuencia del teorema del valor medio [que una función , definida en un intervalo, continua y derivable, con derivada identicamente nula es constante] y evaluando luego la función en x=1 .

Tenemos: $f'(x) = \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = 0$, luego $f(x) = K =$ constante $= f(1) = \ln(a) - \ln(a) - 0 = 0$.